

VEINTISÉIS PROBLEMAS DE DISTANCIAS  
Y ALGUNAS OTRAS CIRCUNSTANCIAS

1. Determinar el valor del parámetro real  $k$  para que la distancia entre los planos  $\alpha \equiv x - 2y + 4z = 2$  y  $\beta \equiv x - 2y + 4z = k$  sea igual a  $\frac{5\sqrt{21}}{21}$  unidades.

SOLUCIÓN:  $k = 7$  ó  $k = -3$ .

2. Determinar el valor del parámetro real  $b$  para que la mínima distancia entre las rectas  $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$  y

$$s \equiv \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = b \end{cases} \text{ sea igual a } \sqrt{2} \text{ unidades.}$$

SOLUCIÓN:  $b = 2$  ó  $b = -2$ .

3. Determinar el valor del parámetro real  $m$  para que la distancia del punto  $A(1, m, m)$  al plano  $\alpha \equiv mx + y + z = 12$  y sea igual a  $\sqrt{6}$  unidades.

SOLUCIÓN:  $m = 2$  ó  $m = 22$ .

4. Determinar el valor del parámetro real  $k$  para que la distancia entre el plano  $\alpha \equiv x + 2y + 2z = k$  y la recta  $r$  (paralela a  $\alpha$ )  $\equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$  sea igual a 1 unidad.

SOLUCIÓN:  $k = 0$  ó  $k = 6$ .

5. Determinar el valor del parámetro real  $k$  para que la distancia entre el punto  $Q(1, k, 3)$  y la recta  $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$  sea igual a  $\sqrt{3}$  unidades.

SOLUCIÓN:  $k = 14$  ó  $k = -\frac{14}{5}$ .

6. Definir las coordenadas del punto  $P$  perteneciente al plano  $\alpha \equiv x - z = 0$  situado a una distancia de 3 unidades del punto  $A(3, 2, 0)$  y a una distancia de 5 unidades del punto  $B(5, 0, 4)$ .

SOLUCIÓN:  $P(1, 0, 1)$  ó  $P\left(\frac{25}{11}, \frac{42}{11}, \frac{25}{11}\right)$ .

7. Definir las coordenadas del punto  $P$  perteneciente a la recta  $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$  equidistante de los puntos  $A(1, 1, 1)$  y  $B(0, 0, 4)$ .

SOLUCIÓN:  $P\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ .

8. Definir las coordenadas del punto  $P$  perteneciente a la recta  $r \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{-2}$  equidistante de los planos  $\alpha \equiv 2x - y + 2z = 4$  y  $\beta \equiv 3x + 4z = 0$ .

SOLUCIÓN:  $P(1, -1, 2)$  ó  $P(4, -5, 0)$ .

9. Determinar los valores de los parámetros reales  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que las rectas concurrentes en el origen de coordenadas  $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{a}$ ,  $s \equiv \frac{x}{b} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$ , y  $l \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{c} = \frac{z}{-1}$  formen un triedro trirrectángulo.

SOLUCIÓN:  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = -1$ .

10. El punto  $M(1,1,1)$  es el centro de un cuadrado de vértices  $ABCD$  cuyo lado  $AB$  está situado en la recta  $r \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-4}{-2}$ . Definir las coordenadas de los vértices del cuadrado, y calcular su perímetro y su área.

SOLUCIÓN: Los vértices son  $A(-2,1,4)$ ,  $B(0,-3,0)$ ,  $C(4,1,-2)$  y  $D(2,5,2)$ .  
El perímetro del cuadrado es 24 u, y el área es igual a  $36 \text{ u}^2$ .

11. Dadas las rectas  $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$  y  $s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ :

- a) Calcular la mínima distancia  $\delta$  entre ambas.  
b) Definir la recta  $p$  que corta perpendicularmente a ambas rectas.

SOLUCIÓN: a)  $\delta = \sqrt{2}$  unidades.

b)  $p \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{z}{-1}, y = 1$

12. Escribir unas ecuaciones paramétricas de la recta  $s$  que pasa por el punto  $A(4,0,-6)$  y corta al eje  $OX$  y a la recta  $r \equiv \frac{x-4}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$ . Determinar también el ángulo  $\alpha$  que esa recta  $s$  forma con el eje  $OX$ , y el ángulo  $\beta$  que esa recta  $s$  forma con la recta  $r$ .

SOLUCIÓN: a)  $s \equiv \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 0 \\ z = -6 - \lambda \end{cases}$

b)  $\alpha = 45^\circ$  y  $\beta = 60^\circ$

13. Dadas las rectas  $r \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{1}$  y  $s \equiv \frac{x}{1} = \frac{z-4}{-1}, y = 2$ , definir en paramétricas la recta  $l$  que corta perpendicularmente a  $r$  y que corta a  $s$  formando con ella un ángulo de  $60^\circ$ .

SOLUCIÓN: Dos soluciones posibles:  $l \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 3 \end{cases}$  y  $l \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$

14. Hallar el valor de  $k$  para que los puntos de corte  $A$ ,  $B$  y  $C$  del plano  $\pi \equiv x - z = k$  con las respectivas

rectas  $a \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$ ,  $b \equiv \begin{cases} x = k + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$  y  $c \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$  estén alineados.

SOLUCIÓN:  $k = 0$  ó  $k = 2$ .

15. Se considera la recta  $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ . Se pide:

- a) Encontrar un punto  $A$  de la recta  $r$  tal que su distancia al punto  $Q(0,1,2)$  sea igual a  $\sqrt{5}$  u.  
 b) Encontrar un punto  $B$  de la recta  $r$  tal que el segmento  $QB$  forme  $60^\circ$  con la recta  $r$ .  
 c) Encontrar un punto  $C$  de la recta  $r$  tal que su distancia al plano  $\pi \equiv x + y - z = 3$  sea igual a  $\sqrt{3} u^2$ .  
 d) Encontrar un punto  $D$  de la recta  $r$  tal que el volumen del tetraedro de vértices  $DEFG$  sea  $\frac{2}{3} u^3$ , siendo  $E, F, G$  los puntos  $E(1,0,0)$ ,  $F(2,0,1)$  y  $G(0,0,3)$ .  
 e) Encontrar un punto  $K$  de la recta  $r$  tal que el área del triángulo de vértices  $IJK$  sea  $\sqrt{3} u^2$ , siendo  $I, J$  los puntos  $I(0,0,0)$  y  $J(1,2,3)$ .  
 f) Encontrar un punto  $S$  de la recta  $r$  tal que  $MN$  sea la hipotenusa del triángulo rectángulo  $SMN$ , siendo  $M$  y  $N$  los puntos  $M(2,5,-3)$  y  $N(3,2,-2)$ .

SOLUCIÓN: a)  $A(1,1,0)$  y  $A(1,-1,2)$       b)  $B\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$  y  $B\left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$   
 c)  $C(1,3,-2)$  y  $C(1,0,1)$       d)  $D(1,-1,2)$  y  $D(1,1,0)$   
 e)  $K(1,0,1)$  y  $K\left(1, \frac{20}{27}, \frac{7}{27}\right)$       f)  $S(1,4,-3)$  y  $S(1,3,-2)$ .

16. Definir la recta  $s$  que pasa por el punto  $A(2,0,0)$ , corta a la recta  $r \equiv x + 2 = y + 1 = z - 1$ , y forma un ángulo de  $30^\circ$  con el plano  $\pi \equiv x + z = 0$ .

SOLUCIÓN:  $s \equiv \frac{x-2}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$

17. Definir el plano  $\pi$  que pasa por  $A(0,2,0)$  y  $B(1,0,1)$  y es perpendicular al plano  $\beta \equiv x - 2y - z = 7$ .

SOLUCIÓN:  $\pi \equiv 2x + y = 2$ .

18. Hallar el punto  $Q$  del plano  $x + y + z = 1$  equidistante de los puntos  $A(1,-1,2)$ ,  $B(3,1,2)$  y  $C(1,1,0)$ .

SOLUCIÓN:  $Q(1,1,0)$ .

19. Hallar un punto  $P$  de la recta  $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$  de forma que el plano que contiene a ese punto  $P$  y a la recta

$s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 1 = z \end{cases}$  sea paralelo a la recta  $t \equiv \begin{cases} y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$ .

SOLUCIÓN:  $P(0,2,0)$

20. Estudiar la posición relativa de las rectas  $r \equiv \begin{cases} x + ay = a \\ y + z = a \end{cases}$  y  $s \equiv \begin{cases} x + az = 0 \\ ax + y = a \end{cases}$ . Si en algún las

rectas se cortan, determinar el punto de corte. Y si en algún caso las rectas son coplanarias, determinar el plano que las contiene.

SOLUCIÓN: a) Si  $a = 1$  ó si  $a = 0$ , las dos rectas se cortan.

Si  $a = 1$ , el punto de corte es  $J(0,1,0)$ , y definen el plano  $\alpha \equiv x + y = 1$ .

Si  $a = 0$ , el punto de corte es  $O(0,0,0)$ , y definen el plano  $\beta \equiv y - z = 0$ .

b) Si a la vez ocurre que  $a \neq 1$  y  $a \neq 0$ , las dos rectas se cruzan.

21. Definir la recta  $p$  paralela a la recta  $t \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$  que corta a las rectas  $s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$  y

$$r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}.$$

SOLUCIÓN:  $p \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+13}{2} = \frac{z+7}{3}$

22. Definir el plano  $\pi$  que pasa por el punto  $A(1,1,1)$ , es paralelo a la recta  $t \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ , y es perpendicular al plano  $\beta \equiv x - 2y - z = 7$ .

SOLUCIÓN:  $\pi \equiv x + y - z = 1$

23. Definir la recta  $s$  simétrica de la  $r \equiv \frac{x-2}{4} = \frac{z}{-1}$ ,  $y = 1$  con respecto al plano  $\pi \equiv x + y + z = 6$ .

SOLUCIÓN:  $s \equiv \frac{x-4}{-2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{3}$

24. Determinar los valores de  $a$  y  $b$  para que las rectas  $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ ax - z = 0 \end{cases}$  y  $s \equiv \begin{cases} x + by = 2 \\ y + z = 2 \end{cases}$  se corten perpendicularmente.

SOLUCIÓN:  $a = b = \frac{1}{2}$ .

25. Sean  $A(2,0,0)$  y  $B(0,0,2)$  dos puntos del plano  $\pi \equiv x + z = 2$ . Definir las coordenadas del punto  $P$  del plano  $\pi$  de manera que el triángulo de vértices  $ABC$  sea equilátero.

SOLUCIÓN: Dos soluciones posibles:  $P\left(\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{10}}{9}, \frac{2}{3}\right)$  y  $P\left(\frac{4}{3}, -\frac{2\sqrt{10}}{9}, \frac{2}{3}\right)$

26. Los puntos  $A(2,2,3)$  y  $B(1,0,1)$  son dos vértices del triángulo rectángulo  $ABC$  de hipotenusa  $BC$ .

Definir las coordenadas del tercer vértice  $C$  si se sabe que está en la recta  $t \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$ .

SOLUCIÓN:  $C(4,8,-3)$