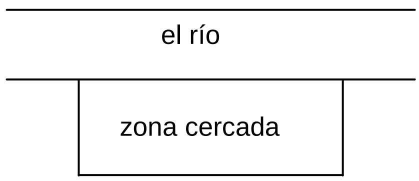
PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN.

1. Se debe cercar una zona rectangular adosada a la orilla de un río, y se dispone a tal fin de una valla de 24 metros de longitud. Se trata de averiguar cuáles deben ser las medidas de ese recinto rectangular de modo que la superficie interior del mismo resulte ser la mayor posible, suponiendo que el lado pegado a la orilla no necesita valla. (Ver esquema)



2. Encontrar las longitudes de los lados del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de radio R metros.

3. Descomponer el número 44 en dos sumandos de modo que el quíntuplo del cuadrado del primero más seis veces el cuadrado del segundo resulte ser la mínima cantidad posible.

4. Se necesita fabricar un marco para una ventana rectangular de 2 metros cuadrados de superficie. El precio del metro lineal de cerco horizontal cuesta 20 €, y el de cerco vertical, 12 €. ¿Qué dimensiones debe tener la ventana para que el marco resulte lo más barato posible?

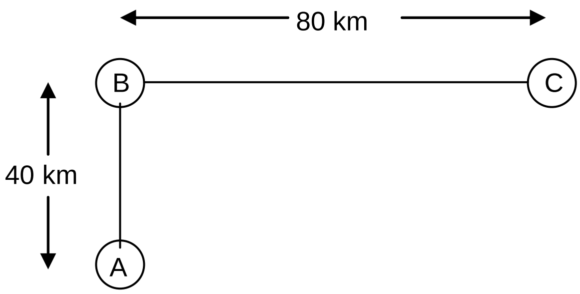
5. Un fabricante produce receptores de radio con un coste de 2.000 pesetas cada uno. Si se venden a x pesetas, se venderán (12.000 – x) receptores al mes. Calcular el precio de venta para el que el beneficio es mayor.

6. Calcular el lado del cuadrado de a) área mínima y b) perímetro mínimo inscritos en un cuadrado de lado L metros.

7. En las cuatro esquinas de una chapa de forma rectangular de dimensiones 10 metros x 12 metros se van a cortar unos cuadrados iguales. A continuación, se va a doblar la figura resultante por las líneas de puntos para de esta manera formar un recipiente (al que evidentemente le va a faltar la tapa superior: es un recipiente “abierto por arriba”). Se trata de calcular las dimensiones de los cuatro cuadraditos que vamos a recortar de las esquinas para que el volumen del recipiente resultante sea el mayor posible.

8. El propietario de un inmueble tiene alquilados los 40 pisos del mismo a 100000 pesetas cada uno. Por cada 10000 pesetas de aumento en el precio del alquiler, pierde un inquilino. ¿Cuál es alquiler que le da el máximo beneficio?

9. Tres ciudades están unidas por una carretera como indica la figura de la derecha. Deseamos enlazar A y C por una autovía. La construcción de un kilómetro de autovía cuesta 5 millones de pesetas, pero si se aprovecha la carretera que ya existe entre B y C, cuesta sólo 4. ¿De qué forma conviene construir la autovía para que es gasto de la obra sea mínimo?



10. Un comerciante compra artículos a 350 € la unidad. Sabe que si el precio de venta de cada unidad es 750 €, vende al mes 30 unidades, y que por cada descuento de 20 € en el precio de venta de cada unidad, incrementa las ventas de cada mes en tres unidades. Determina el precio de venta de cada unidad que hagan máximos los beneficios del comerciante.

11. Un campesino dispone de 54000 kilos de fruta que puede vender al día de hoy a 0,20 euros/kilogramo. Cada día que pasa, el precio de venta del kilo aumenta en 0,025 euros, pero se estropean 1000 kilos de fruta. Calcula cuándo le interesa vender la fruta para obtener los máximos ingresos posibles, y determina a cuánto ascenderán esos ingresos.

12. Supongamos que el valor de una piedra preciosa es proporcional al cuadrado de su peso. Un joyero encarga a su ayudante que corte esta piedra en dos partes; y cuando el joyero ve las dos piezas, observa que la pérdida de valor de dicha piedra ha sido máxima. ¿Cómo cortó el ayudante la piedra preciosa? Razona la respuesta.

13. Se desea fabricar un depósito prismático de base cuadrada de 1800 litros. Si el material de la base cuesta 50 € el m^2, el de la tapa 40 € el m^2, y el de las paredes laterales 25 € el m^2, se trata de averiguar las dimensiones del depósito para que su fabricación resulte lo más barata posible.

14. Debemos construir un contenedor en forma prismática, de base rectangular y altura un metro, de manera que su capacidad sea de 9 metros cúbicos. El material de la base cuesta 5000 ptas/m^2, el de la tapa, 6000 ptas/m^2, y el de las cuatro paredes laterales, 4000 ptas/m^2. Calcula las dimensiones que tiene que tener la base (rectangular, como se ha dicho) para el coste de la fabricación del contenedor sea el menor posible.

15. Determina dos números reales que sumen 30 de manera que la suma del doble del cuadrado de uno de ellos más el triple del cuadrado del otro sea la menor posible.

16. Encuentra dos números reales que sumen 100 de manera que al sumar a uno de ellos la cuarta parte del cuadrado del otro, la cantidad resultante en la suma sea la menor posible.

17. Encuentra un número real tal que sea máximo el resultado obtenido al restar al triple del número la décima parte de su cuadrado.

18. Determinar dos números cuya suma sea 24 y tales que el producto del uno por el cubo del otro sea máximo.

19. Halla un número de dos cifras tal que la suma de sus cifras sea 12 y de modo que la suma del cubo de la cifra de las decenas y del triple del cuadrado de la cifra de las unidades sea lo más pequeña posible.

20. Calcula el punto de la recta $2x + y = 3$ tal que el producto de sus coordenadas sea máximo.

21. Una empresa fabrica cajas de latón sin tapa de volumen 500 cm^3, para almacenar un líquido colorante. Las cajas tienen la base cuadrada. Hallar la altura y el lado de la base de cada caja para que la cantidad de latón empleada en fabricarlas sea la mínima posible.

22. Una parcela de forma rectangular y 2400 m^2 de superficie va a ser rodeada por una valla y además dividida en dos partes iguales por medio de otra valla paralela a uno de los lados. Averigua las dimensiones que debería tener la parcela para que fuera mínima la cantidad de valla a emplear.

23. Una persona amante de las matemáticas desea donar sus 3600 libros a dos bibliotecas A y B. Sus instrucciones son que los lotes se hagan de modo que el producto del número de libros destinados a la biblioteca A por el cubo del número de libros destinados a la biblioteca B sea máximo. Determina la cantidad de libros recibida por cada biblioteca.

24. Un granjero dispone de 3000 € para cercar una porción rectangular de terreno adyacente a un río, usando éste como un lado del área cercada; es decir, construirá tres cercas. El coste de la cerca paralela al río es de 5 € por metro instalado, y el de la cerca para cada lado restante es de 3 € por metro instalado. Calcula las dimensiones del área máxima que puede ser cercada.

25. Descompón el número 14 en suma de tres números reales positivos tales que uno de ellos sea el doble de otro, y la suma de los cuadrados de los tres sea la menor posible.

26. Una empresa ha decidido mejorar su seguridad instalando nueve alarmas. Un especialista en el tema señala que, dada la estructura de la empresa, sólo puede optar por dos tipos de alarmas: de tipo A ó de tipo B. Además afirma que la seguridad de la empresa es directamente proporcional al producto del número de alarmas tipo A instaladas por el cuadrado del número de alarmas instaladas del tipo B. ¿Cuántas alarmas de cada tipo se deben instalar en esa empresa para que su seguridad sea la mayor posible?

27. Encuentra dos números cuya suma sea 100 y tal que el producto del menor por la diferencia entre el mayor y el menor sea máximo.

28 Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 pesetas la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada peseta que aumenta el precio, vende dos helados menos al día. Si el coste por unidad es de 40 pesetas, ¿a qué precio de venta es máximo el beneficio diarios que obtiene el heladero?

29. Una hoja de papel debe contener 18 centímetros cuadrados de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 centímetros cada uno, y los laterales, de 1 centímetro. Hallar las dimensiones de la hoja para las que el gasto de papel es mínimo.

30. Encuentra dos números positivos que sumen 36 de manera que la suma de sus cuadrados resulte una cantidad lo más pequeña posible.

31. Queremos diseñar un envase cuya forma sea un prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral usamos un determinado material, pero para la base debemos emplear un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible.

32. Encuentra el número real tal que la suma del mismo con su cuadrado sea mínima.

33. A 10 km de tu casa te acuerdas de que te has dejado el agua corriendo, lo que te cuesta 10 ptas a la hora.

    Volver a casa a una velocidad (constante) de x km/h te cuesta en combustible $9+\frac{x}{10}$ ptas por cada kilómetro.

    a) ¿Cuánto te cuesta volver a casa a x km/h?
    b) ¿Cuánto tiempo tardas en llegar a casa si viajas a esa velocidad?
    c) ¿Cuánto te cuesta el consumo de agua mientras regresas a casa?
    d) ¿A qué velocidad debes regresar a casa para que el coste total de consumo de agua más combustible sea mínimo?

34. Una huerta tiene actualmente 25 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. Calcula:
    a) La producción actual de la huerta.
    b) La producción que se obtendría de cada árbol si se plantan x árboles más.
    c) La producción que se obtendría en total de la huerta si se plantan x árboles más.
    d) ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima?

35. Halla los puntos de la curva $y=x^3-3x^2-24x+24$ en los que las pendientes de las tangentes a la curva sean la mayor y la menor posibles.

36. Un granjero compra una ternera de 270 kilos por 18000 pesetas. Alimentar al animal le cuesta 15 pesetas al día, y la ternera aumenta de peso 0,45 kilos diarios. Por otro lado, cada día que pasa, el valor del animal en el mercado disminuye, de modo que el valor al cabo de t días, dependiendo del peso del animal, es $\left(100-\frac{t}{18}\right)$ pesetas por kilo. Calcula:
    a) El peso de la ternera al cabo de t días.
    b) Valor total de la ternera en el mercado al cabo de t días.
    c) Coste total invertido en esos t días, incluyendo la compra y la alimentación.
    d) Ganancia obtenida por el granjero si vende la ternera a los t días (la ganancia será el valor de la ternera en ese instante menos los costes invertidos).
    e) ¿Cuándo debe vender la ternera para obtener la máxima ganancia?