PROBLEMAS. GEOMETRÍA DEL ESPACIO. LUGARES GEOMÉTRICOS.

1. Define las coordenadas de los puntos de intersección de la esfera de centro $C(0,2,3)$ y radio $\sqrt{11}$ unidades con la recta $s \equiv \frac{x-4}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-6}{2}$.
   SOLUCIÓN: Los puntos $A(1,1,0)$ y $B(3,3,4)$.

2. Escribe la ecuación de la esfera de centro $C(0,2,3)$ que es tangente al plano $\alpha \equiv y - z = 0$.
   SOLUCIÓN: La esfera tiene por ecuación $\varphi(x,y,z) \equiv 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8y - 12z + 25 = 0$

3. Determina el centro y el radio de la esfera $\varphi(x,y,z) \equiv 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x + 4y - 8z + 5 = 0$.
   SOLUCIÓN: El centro es el punto $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$, y el radio mide $\frac{1}{2}$ unidades.

4. Define los planos bisectores de los planos $\begin{cases} \alpha \equiv x + 2y - 2z = 2 \\ \beta \equiv 4x + 3y = 2 \end{cases}$.
   SOLUCIÓN: Un plano es $\pi \equiv 7x - y + 10z + 4 = 0$
   El otro plano es $\rho \equiv 17x + 19y - 10z - 16 = 0$

5. Define el lugar geométrico de los puntos situados a igual distancia de los planos $\begin{cases} \alpha \equiv x + y = 0 \\ \beta \equiv x + y = 8 \end{cases}$.
   SOLUCIÓN: Es el plano $\pi \equiv x + y = 4$

6. Define el lugar geométrico de los puntos situados a igual distancia del punto $A(0,1,0)$ que del plano $\pi \equiv x + y = 4$.
   SOLUCIÓN: Es la superficie $\varphi(x,y,z) \equiv x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 8x + 4y - 14 = 0$

7. Define el lugar geométrico de los puntos situados a triple distancia del plano coordenado OXY que del plano $\alpha \equiv 2x - y - 2z = 4$.
   SOLUCIÓN: Un plano es $\pi \equiv 2x - y - 3z = 4$
   El otro plano es $\rho \equiv 2x - y - z = 4$

8. Escribe la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $A(3,3,1)$ y $B(9,5,-1)$ sabiendo que su centro pertenece a la recta $s \equiv x = 1, \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}$.
   SOLUCIÓN: Es la esfera $\varphi(x,y,z) \equiv (x-1)^2 + (y-7)^2 + (z+10)^2 = 141$

9. Escribe la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $A(0,0,1)$, $B(2,2,-1)$ y $C(2,4,5)$ sabiendo que su centro pertenece al plano $\alpha \equiv x - 3z + 3 = 0$.
   SOLUCIÓN: Es la esfera $\varphi(x,y,z) \equiv (x-9)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 99$

10. Describir la línea resultante de la intersección del plano $\alpha \equiv 2x + 2y + z = 12$ con la esfera $\varphi(x, y, z) \equiv (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 25$.

SOLUCIÓN: Es una circunferencia con centro en $(3, 4, -2)$, situada en el plano dado α, y de radio 4 unidades.

11. Definir la esfera con centro en la recta $s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$ sabiendo que los puntos $A(1,1,2)$ y $B(2,3,5)$ están en la superficie de la esfera.

SOLUCIÓN: Es la esfera $\varphi(x, y, z) \equiv (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 6$

12. Describir la línea resultante de la intersección del plano $\alpha \equiv 3x + 4y + 5z = 24$ con la esfera $\varphi(x, y, z) \equiv (x-5)^2 + (y-6)^2 + (z-7)^2 = 50$.

SOLUCIÓN: No hay tal línea: el plano y la esfera son tangentes. El punto de tangencia es $A(2, 2, 2)$.