GEOMETRÍA ANALÍTICA. PROBLEMAS FÁCILES (CASI TODOS ELLOS).

1. Escribe en forma paramétrica los planos $\alpha \equiv x + y - 2z = 2$, $\beta \equiv 2x - z = -1$ y $\pi \equiv z = 2$.

2. Escribe en forma general los planos $\sigma \equiv \begin{cases} x = & -2+3\lambda \\ y = & 1-\lambda \\ z = & \lambda+\mu \end{cases}$ y $\rho \equiv \begin{cases} x = & -2 \\ y = & 1-2\lambda-\mu \\ z = & 1-\lambda+2\mu \end{cases}$.

3. Escribe la recta $r \equiv \dfrac{x}{2} = y - 1 = \dfrac{2-z}{3}$ en forma paramétrica y como corte de dos planos.

4. Escribe la recta $r \equiv \begin{cases} x - y & = 1 \\ x + z & = 2 \end{cases}$ en forma continua y en forma paramétrica.

5. Escribe la recta $r \equiv \begin{cases} x = & -1 \\ y = & \lambda \\ z = & 1+2\lambda \end{cases}$ en forma continua y como corte de dos planos.

6. Define el plano que pasa por el punto $A(1,1,-1)$ y es paralelo al plano $\alpha \equiv x + y - 2z = 2$.

7. Define el plano que pasa por el punto $A(1,1,-1)$ y es paralelo al plano $\alpha \equiv \begin{cases} x = & 1+2\lambda \\ y = & 1+2\mu \\ z = & \lambda+\mu \end{cases}$.

8. Dado el plano $\alpha \equiv 2x - y - z = 3$, define:
   a) Un vector perpendicular al plano, y un punto cualquiera contenido en el plano.
   b) Dos vectores contenidos en el plano.
   c) La ecuación de una recta contenida en el plano.
   d) La ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano.

9. Dado el plano $\beta \equiv \begin{cases} x = & 2-\lambda \\ y = & \lambda-\mu \\ z = & 1+2\mu \end{cases}$, define:
   a) Un vector perpendicular al plano, y un punto cualquiera contenido en el plano.
   b) Dos vectores contenidos en el plano.
   c) La ecuación de una recta contenida en el plano.
   d) La ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano.

10. Determina el plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{2z-1}{2}$.

11. Define el plano que pasa por $A(1,2,0)$ y es perpendicular a $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1}$, $z = 4$.

12. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1,-1,0)$ y $B(-3,-3,2)$.

13. Escribe la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1,1,-1)$ y es paralelo al plano $\alpha \equiv x - y = 2$

14. Escribe la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1,1,-1)$ y es paralelo al plano

$$\beta \equiv \begin{cases} x = & 2 + 3\lambda - \mu \\ y = & 1 - \lambda + \mu \\ z = & \lambda + \mu \end{cases}$$

15. Halla los valores de A y B si sabes que los puntos $(1,2,2)$ y $(-1,-1,1)$ pertenecen al plano $Ax + By - z = 4$.

16. Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1,2,0)$, $B(2,3,2)$ y $C(0,0,3)$.

17. Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1,1,-1)$ y es paralela a la recta:

a) $r \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{-1},\ z = 1$ b) $s \equiv \begin{cases} x + y + z & = 1 \\ x - y + 2z & = 2 \end{cases}$

19. Define el plano que pasa por el punto $A(1,2,-1)$ y por la recta $r \equiv \begin{cases} x = & 1 \\ y = & \lambda \\ z = & \lambda \end{cases}$

20. Comprueba que las rectas $r \equiv x = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y & = & 1 \\ 3y + z & = & -3 \end{cases}$ son paralelas, y escribe la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

21. Comprueba que sólo existe un punto que esté a la vez en los planos $\alpha \equiv x - 2y = 2$, $\beta \equiv x - 2z = 0$ y $\gamma \equiv y + 2z = 2$, y determina las coordenadas de ese punto. Comprueba luego que sólo existe un punto que esté a la vez en el plano $\alpha \equiv x - 2y = 2$ y en la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2z & = 0 \\ y + 2z & = 2 \end{cases}$, y define las coordenadas de ese punto.

22. Comprueba que el plano $\alpha \equiv 3x + y - z = 1$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = & 1 \\ y = & \lambda \\ z = & 2 + \lambda \end{cases}$ sólo tienen un punto común.

¿Cuáles son las coordenadas de ese punto?

23. Escribe las ecuaciones de dos planos que pasen por el punto $A(1,2,0)$ y que sean perpendiculares al plano $\alpha \equiv x - y - z = 6$.

24. Define los valores de b y c para que los puntos $A(1,2,0)$, $B(5,4,-2)$ y $C(-2,b,c)$ estén alineados.

25. Define el valor de b para que los segmentos AB y BC sean perpendiculares, siendo $A(1,2,0)$, $B(5,4,-2)$ y $C(-2,b,3)$.

26. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1,2,0)$ y es paralela a la recta $s \equiv \begin{cases} x+y & = & 1 \\ 3y+z & = & -3 \end{cases}$.

27. Determina los valores de b y c para que las rectas $r \equiv x = \frac{y}{2} = -z$ y $m \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{b} = \frac{z-2}{c}$ sean:

a) paralelas b) perpendiculares

28. Define el valor de k para que los segmentos AB y BC formen un ángulo de 45º, siendo $A(2,4,0)$, $B(3,4,1)$ y $C(k+3,5,0)$

29. Escribe las ecuaciones de los tres ejes coordenados OX, OY y OZ y de los tres planos coordenados OXY, OXZ y OYZ.

30. Dado el plano $\alpha \equiv 2x - y + z = -2$:
a) Escribe las ecuaciones de dos rectas cualesquiera paralelas de ese plano.
b) Escribe las ecuaciones de dos rectas cualesquiera perpendiculares que pertenezcan a ese plano.

31. Dado el plano $\alpha \equiv 2x - y = -2$:
a) Escribe las ecuaciones de dos rectas cualesquiera paralelas de ese plano.
b) Escribe las ecuaciones de dos rectas cualesquiera perpendiculares que pertenezcan a ese plano.

32. Dado el plano $\alpha \equiv x = -2$:
a) Escribe las ecuaciones de dos rectas cualesquiera paralelas de ese plano.
b) Escribe las ecuaciones de dos rectas cualesquiera perpendiculares que pertenezcan a ese plano.

33. Escribe la ecuación de una recta cualquiera r que corte a la recta $s \equiv \begin{cases} x = & 1-\lambda \\ y = & \lambda \\ z = & 2+\lambda \end{cases}$, y halla la ecuación del plano que forman.

34. Escribe ecuación de una recta cualquiera r paralela a la recta $s \equiv \begin{cases} x = & 1-\lambda \\ y = & \lambda \\ z = & 2+\lambda \end{cases}$, y halla la ecuación del plano que forman.

35. Escribe las ecuaciones de dos planos secantes, y determina un tercer plano cualquiera que pase por la recta de corte de los dos planos anteriores.

36. Determina el plano que pasa por el punto $A(1,0,-3)$ y es paralelo a las rectas $s \equiv \begin{cases} x = & 1-\lambda \\ y = & \lambda \\ z = & 2+\lambda \end{cases}$ y $t \equiv \begin{cases} x-y & = 0 \\ x+z & = 0 \end{cases}$.

37. Determina la recta que pasa por el punto $A(1,0,-3)$ y es paralela a los planos $\alpha \equiv x = y$ y $\beta \equiv \begin{cases} x = & \lambda \\ y = & \mu \\ z = & 1 \end{cases}$.

38. Determina el plano que pasa por los puntos $A(1,0,-3)$ y $B(6,2,1)$ y es paralelo a la recta $t \equiv \begin{cases} x - y - z & = 0 \\ x + 4y + z & = 0 \end{cases}$.

39. Define una recta que pasa por el punto $A(1,0,-3)$ y es paralela al plano $\alpha \equiv 2x = y$.

40. Escribe las ecuaciones de los planos coordenados OXY, OXZ y OYZ, y las de los ejes coordenados OX, OY y OZ.

41. Imagina un prisma recto de base cuadrada (lado de la base igual a 4 cm y altura igual a 8 cm) situado en el primer cuadrante y pegado a los ejes coordenados. Escribe:
   a) Las ecuaciones de los planos que contienen a las caras del prisma.
   b) Las ecuaciones de las rectas que contienen a las aristas del prisma.
   c) Las ecuaciones de las rectas que contienen a las diagonales del prisma.

42. Dado el segmento AB de extremos $A(1,0,-3)$ y $B(6,2,1)$:
   a) Define el plano perpendicular al segmento y que pasa por su punto medio.
   b) Define dos planos perpendiculares al segmento que lo cortan en tres partes iguales.
   c) Calcula la longitud del segmento.

43. La base de una pirámide está situada en el plano OXY: es un cuadrado cuyos vértices son los puntos $O(0,0,0)$, $A(4,0,0)$, $B(4,4,0)$ y $C(0,4,0)$. El vértice de la pirámide es el punto $V(2,2,6)$. Escribe las ecuaciones de:
   a) La recta que contiene a la altura de la pirámide.
   b) La recta que pasa por el origen y es perpendicular a la cara lateral BCV.
   c) El plano que contiene a la base $OABC$.
   d) El plano que contiene a la cara lateral BCV.

44. Los puntos $A(1,0,-3)$, $B(4,4,0)$ y $C(-3,-3,5)$ son tres vértices de un paralelogramo. Determina las coordenadas del cuarto vértice D, y calcula el perímetro de ese paralelogramo $ABCD$.

45. Halla a y b para que los vectores (referidos a una base ortonormal) $v(1,0,1)$ y $w(a,b,0)$:
   a) formen un ángulo de 45º   b) formen un ángulo de 60º

46. Dados los puntos $A(1,-1,0)$ y $B(2,-3,-2)$ pertenecientes al plano $\alpha \equiv 2x - y + 2z = 3$, define dos puntos C y D también situados en el plano α tales que el cuadrilátero de vértices consecutivos $ABCD$ sea un cuadrado.
   SOLUCIÓN: Ó bien son $C(0,-5,-1)$ y $D(-1,-3,1)$, ó bien son $C(4,-1,-3)$ y $D(3,1,-1)$.