

1. Calcular las potencias n -ésimas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN:

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}, B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\operatorname{sen} nx \\ \operatorname{sen} nx & \cos nx \end{pmatrix}$$

2. Definir todas las matrices A que satisfacen la ecuación $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN: $A = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \rho \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$, determinar una matriz simétrica y regular P tal que $B = P^{-1}AP$

SOLUCIÓN: Como $B = P^{-1}AP$ equivale a $PB = AP$, resulta $P = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular $(A - I)^2$

b) Haciendo uso del resultado del apartado a), obtener A^4

SOLUCIÓN: a) $(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -4 & -7 & 4 \\ -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$

5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, hallar A^{428}

SOLUCIÓN: $A^{428} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

6. Se consideran las matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcular M^n .

b) Definir todas las matrices M tales que $M^{100} = V$.

SOLUCIÓN: a) $M^n = \begin{pmatrix} a^n & nba^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

b) Dos posibilidades: $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{100} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{100} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

7. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & m \end{pmatrix}$, hallar para qué valores de m existe la matriz inversa de la dada. Calcular

luego la inversa si es $m = 2$.

SOLUCIÓN: Existe inversa siempre que sea $m \neq -2 \pm \sqrt{7}$.

Si $m = 2$, la inversa de la dada es $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -12 & 6 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

8. Sea $A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ 2a & a+b \end{pmatrix}$. Calcular para qué valores de a y b existe A^{-1} . Para esos valores, determinar A^{-1} .

SOLUCIÓN: No existe A^{-1} cuando $a = b = 0$. Si existe A^{-1} , es $A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a+b & -b \\ -2a & a+b \end{pmatrix}$.

9. Determinar para qué valores de x existe la inversa de $\begin{pmatrix} 3x & x & x \\ 0 & 3x & -x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$, y calcularla, cuando exista, en función de x

SOLUCIÓN: Existe inversa si es $x \neq 0$. La inversa es $\begin{pmatrix} 1/3x & -1/9x & -4/9x \\ 0 & 1/3x & 1/3x \\ 0 & 0 & 1/x \end{pmatrix}$.

10. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Obtener $(B \cdot A)^{-1}$.

SOLUCIÓN: $(B \cdot A)^{-1} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

11. Se sabe (no es necesario comprobarlo) que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ 7 & 4 & 1 & -6 \\ -9 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ verifica la igualdad

$A^2 = A + I$. Calcular A^{-1} y A^4 .

SOLUCIÓN: Como $A^2 = A + I$ significa que $A^2 - AI = I$, es decir, $A(A - I) = I$, resulta que:

$$\text{a) } A^{-1} = A - I = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & 1 & -6 \\ -9 & -2 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A^4 = A^2 \cdot A^2 = (A + I)(A + I) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 7 & 5 & 1 & -6 \\ -9 & -2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 7 & 5 & 1 & -6 \\ -9 & -2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

12. Hallar k para que la matriz $\begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{pmatrix}$ no tenga inversa.

SOLUCIÓN: No existe inversa si es $k = 0$.

13. Determinar una matriz cuadrada A de orden 2 tal que $A + A^t = 2I$, con $\det A = 2$.

SOLUCIÓN: Ó bien es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ó bien es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

14. Definir k para que la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -k \end{pmatrix}$ coincida con su opuesta.

15. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, hallar k para que la matriz $(A - kI)^2$ sea la matriz nula.

SOLUCIÓN: $k = 1$.

16. Determinar todas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ tales que su inversa sea $(2I - A)$.

SOLUCIÓN: $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$

17. Hallar a para que $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & 2 & a \\ a & a & 3 \end{pmatrix}$ no tenga inversa.

SOLUCIÓN: $a = 0$, $a = 2$ y $a = 3$.

18. Determinar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 3 & 12 & 6 \\ b & 1 & 4 & 2 \\ a+b & 4 & 16 & 8 \end{pmatrix}$ según sean los valores de a y b .

SOLUCIÓN: a) Si $a = 3b$, Rang $A = 1$
 b) Si $a \neq 3b$, Rang $A = 2$

19. Calcular en función de a y b la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2a & b & 1 \\ 2 & ab & 1 \\ 2 & b & a \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a+1}{2(a-1)(a+2)} & \frac{1}{2(1-a)(a+2)} & \frac{1}{(1-a)(a+2)} \\ \frac{1}{b(1-a)(a+2)} & \frac{a+1}{b(a-1)(a+2)} & \frac{1}{(1-a)(a+2)} \\ \frac{1}{(1-a)(a+2)} & \frac{1}{b(1-a)(a+2)} & \frac{a+1}{(a-1)(a+2)} \end{pmatrix}$

20. Determinar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -1 & a-1 & 3 \\ 0 & a-2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & a+3 & -1 \\ 0 & -a & 0 & a \end{pmatrix}$ según sea el valor de a .

SOLUCIÓN: a) Si $a = 0$, ó $a = 1$, ó $a = -3$, Rang $A = 3$
 b) En cualquier otro caso, Rang $A = 4$

21. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, y $P = \begin{pmatrix} a & a \\ b & c \end{pmatrix}$, definir la matriz P con determinante igual a 1 de modo que $AP = PB$.

SOLUCIÓN: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ ó $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

22. Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & b \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$

SOLUCIÓN: Tres soluciones, $x = a$, $x = b$, $x = -a - b$

23. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$. Hallar a y b para que se verifique $A^2 = A$.

SOLUCIÓN: $a = 2$, $b = -1$.

24. Discutir y resolver en los casos en los que haya infinitas soluciones
$$\begin{cases} (a+1)x + 3y + az = 1 \\ 3x + (a+1)y + 2z = b-1 \\ ax + 2y + az = 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

1º) Si simultáneamente ocurre que $a \neq \pm 2$, Sistema Compatible Determinado (sea cual sea el valor del parámetro b)

2º) Si $a = 2$ hay que distinguir dos casos:

a) Caso $b \neq 2$: Sistema Incompatible.

b) Caso $b = 2$: Sistema Compatible Indeterminado, con solución
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

3º) Si $a = -2$ hay que distinguir dos casos:

a) Caso $b \neq -2$: Sistema Incompatible.

b) Caso $b = -2$: Sistema Compatible Indeterminado, con solución
$$\begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

25. Calcular los determinantes
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

a) El primero es un determinante de Vandermonde, y vale $(b-a)(c-a)(c-b)$

b) El segundo vale $(b-a)(c-a)(c-b)(ab+ac+bc)$

26. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular $\det(A^t \cdot A^{-1})^{276}$.

SOLUCIÓN: $\det(A^t \cdot A^{-1})^{276} = 1$.

27. Calcular en función de n el determinante $|D| = \begin{vmatrix} n & n+1 & n+2 \\ n+3 & n+4 & n+5 \\ n+6 & n+7 & n+8 \end{vmatrix}$

SOLUCIÓN: $|D| = 0$.

28. Calcular el determinante $|D| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a-1 & b+2 & c-1 \\ a+1 & b-3 & c+2 \end{vmatrix}$ conociendo a, b, c .

SOLUCIÓN: $|D| = a + b + c$.

29. Calcular los valores de m que anulan el determinante
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & m+1 & m \\ 2m & 2m+1 & 2m+1 \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN: $m = -\frac{1}{3}$

30. Calcular los valores de a que anulan el determinante $\begin{vmatrix} 3a+1 & a & a \\ 6a+2 & 2a+1 & 2a \\ 3a+1 & a & a+1 \end{vmatrix}$

SOLUCIÓN: $a = -\frac{1}{3}$

31. Calcular el valor del determinante $|D| = \begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$

SOLUCIÓN: $|D| = 4abc$.

32. Definir las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $A^2 = I$ y cuyo determinante valga 1.

SOLUCIÓN: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

33. Sea una matriz cuadrada A tal que $A^2 = A$.

a) Hallar $(A - kI)^3$ (k es un número real)

b) Hallar k en el caso en que se verifique $(A - kI)^3 = A - k^3I$

SOLUCIÓN: a) $(A - kI)^3 = A - k^3I$

b) Ó bien es $k = 0$, ó bien es $k = 1$.

34. Definir A^{-1} sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ coincide con su adjunta.

SOLUCIÓN: $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

35. Discutir y resolver en los casos en los que haya infinitas soluciones $\begin{cases} ax - a^2y + z = a - 1 \\ x + y + az = 1 - a \\ x + ay + az = 1 - a \end{cases}$

SOLUCIÓN:

1º) Si simultáneamente ocurre que $a \neq \pm 1$, Sistema Compatible Determinado.

2º) Si $a = 1$: Sistema Compatible Indeterminado, con solución $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$

3º) Si $a = -1$: Sistema Compatible Indeterminado, con solución $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$

36. Discutir y resolver cuando sea posible
$$\begin{cases} ax - y = 0 \\ x - ay = a - 1 \\ x - y = 1 - a \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

1º) Si $a \neq 1$ ó $a \neq -2$, Sistema Incompatible.

2º) Si $a = 1$: Sistema Compatible Indeterminado, con solución
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$$

3º) Si $a = -2$: Sistema Compatible Determinado, con solución
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

37. Discutir y resolver en los casos en los que haya infinitas soluciones
$$\begin{cases} a^3x + a^2y + az = a + 1 \\ x + y + z = a + 1 \\ x + y + az = a + 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

1º) Si simultáneamente ocurre que $a \neq 0$ y $a = 1$, Sistema Compatible Determinado.

2º) Si $a = 1$: Sistema Compatible Indeterminado, con solución
$$\begin{cases} x = 2 - \lambda - \mu \\ y = \mu \\ z = \lambda \end{cases}$$

3º) Si $a = 0$: Sistema Incompatible

38. Discutir y resolver en los casos en los que haya infinitas soluciones
$$\begin{cases} x + ay + az = 1 \\ ax + y + z = b \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

1º) Si simultáneamente ocurre que $a = \pm 1$, Sistema Compatible Indeterminado.

Solución:
$$x = \frac{a^2 - a + b - 1}{a^2 - 1}, y = \frac{a - b}{a^2 - 1} - \lambda, z = \lambda$$

2º) Si $a = 1$. Contemplamos dos casos:

a) Si $b \neq 1$, Sistema Incompatible

b) Si $b = 1$, Sistema Compatible Indeterminado, con solución
$$\begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \mu \\ z = \lambda \end{cases}$$

3º) Si $a = -1$. Contemplamos dos casos:

a) Si $b \neq -1$, Sistema Incompatible

b) Si $b = -1$, Sistema Compatible Indeterminado, con solución
$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \mu \\ z = \lambda \end{cases}$$